ARTÍCULO ORIGINAL

LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

THE DIRTA DELTA FUNCTION

Jaime Melquiades Lizárraga
Universidad Nacional Agraria de la Selva. Tingo María, Perú.
Correo electrónico: jaime.melquiades@unas.edu.pe
Código ORCID: 0000-0002-4364-053X

***Recepción**: 11 de octubre de 2018* ***Aceptado**: 31 de diciembre de 2018*

Resumen

La función delta de Dirac es una función que tiene salto, es decir, no es una función que este definida para cada punto de su dominio. Además satisface $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$, por lo que es llamada **distribución o función de prueba**, que no es más un objeto matemático que generaliza la noción de función y la de medida. La noción de distribución o función generalizada sirve para extender el concepto de derivada a todas las funciones localmente integrables y a entes aún más generales. Esto nos motivó a que usando la función de Heaviside obtuviéramos las derivadas hasta el orden 3 de la función delta de Dirac, con lo que podemos decir la función delta de Dirac es un conjunto de base, y así extender a definir $<\varphi, f>$ el cual representa el valor numérico del funcional φ en la función de base f. Asimismo, se verifico que $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t+t_0)dt = f(t_0)$. Entonces ante la interrogante, ¿Cuáles son los condicionamientos que debe tener n-ésima derivada de la función delta de Dirac para que tenga una expresión analítica y un sentido geométrico?, entonces es necesario tener como referente la función delta de Dirac, así como las expansiones en serie de Fourier y el método de la cuadratura para integrales y nos planteamos la siguiente hipótesis: "qué condiciones debe tener una función generalizadas para extender la noción de derivada a todas las funciones localmente integrables". Por lo que se realizó el análisis de la condición de función localmente integrable, apoyándonos en el lema de Du Bois – Reymond, luego procedimos a realizar el análisis de la condición de función generalizada singular y finalmente el análisis de la derivada de funciones generalizadas, encontrando que hay una relación biunívoca entre las funciones localmente integrables en R^n y las funciones generalizadas regulares, es decir, hay una equivalencia entre la función localmente integrable y la función generalizada dada por $<\varphi, f> = \int \varphi(t)f(t)dt$.

Palabras clave: La función delta de Dirac, función generalizada, función de base, función localmente integrable, función generalizada singular, relación biunívoca.

Abstract

The delta function of the address is a function that has a jump, that is, it is not a function that is defined for each domain point. Also, for what $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$ is called the distribution or the test function, which is no longer a mathematical object that generalizes the notion of function and that of measurement. The notion of distribution or generalized function serves to extend the concept of derivative to all locally integrable functions and to even more general entities. This motivated us to use the function of Heaviside to obtain the derivatives up to order 3 of the Dirac delta function, with which we can say the Dirac delta function is a base set, and thus extend to define $<\varphi, f>$ which represents the numerical value of the functional φ in the base function f. It was also verified that $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t+t_0)dt = f(t_0)$. Then, before the question, ¿what are the conditions that must be derived from the Dirac delta function so that it has an analytical expression and a geometric sense? then it is necessary to have as a reference the Dirac delta function, as well as the Fourier series expansions and the quadrature method for integrals and we propose the following hypothesis: "What conditions a generalized function must have to extend the notion of derivative to all locally integrable functions". Therefore, the analysis of the locally integrable function condition was carried out, based on the Du Bois - Reymond motto, then we proceeded to perform the analysis of the singular generalized function condition and finally the analysis of the derivative of generalized functions, finding that there is a one-to-one relationship between locally integrable functions in R^n and regular generalized functions, that is, there is an equivalence between the locally integrable function and the generalized function given by $<\varphi, f> = \int \varphi(t)f(t)dt$.

Key words: The Dirac delta function, generalized function, base function, locally integrable function, singular generalized function, biunivocal relation.

Introducción

La función delta de Dirac o también conocida función impulso unitario es un tipo de función que permite analizar, en un intervalo no muy largo de tiempo, las distintas adaptaciones conceptuales que se hacen de medios importantes de la matemática, utilizados de acuerdo con los intereses de ciertas disciplinas. La función delta formulada por Dirac en 1930, interesa a la comunidad científica, considerando las dos direcciones básicas: la primera hacia su fundamentación matemática y la segunda hacia su aplicación práctica. Estas dos direcciones se han interceptado, pues quienes han dotado a la función delta de Dirac de un corpus teórico se preocupan por tratar de mostrar su enorme campo de aplicación, mientras que los que la aplican, tratan de dotarla de una cierta fundamentación.

La función delta de Dirac no es una función estrictamente hablando, debido a que toma valores infinitos, como distribución, define una funcional en forma de integral sobre un cierto espacio de funciones. A veces, informalmente, se expresa la función delta de Dirac como el límite de una sucesión de funciones que tiende a cero en todo punto del espacio excepto en un punto para el cual divergiría hacia el infinito. Se escribe como: $\delta\,(t) = \begin{cases} 0, si\ t \neq 0 \\ \infty, si\ t = 0 \end{cases}$, en la ingeniería su importancia radica en el procesamiento de señales, entonces surge la interrogante, ¿Cuáles son los condicionamientos que debe tener n-ésima derivada de la función delta de Dirac para que tenga una expresión analítica y un sentido geométrico?, entonces es necesario tener como referente la función delta de Dirac, así como las expansiones en serie de Fourier y el método de la cuadratura para integrales y nos planteamos la siguiente hipótesis: “qué condiciones debe tener una función generalizadas para extender la noción de derivada a todas las funciones localmente integrables”.

El objetivo de este estudio es establecer las condiciones para definir las derivadas generalizadas de funciones discontinuas. Es decir, analizar la condición de función localmente integrable y lo más importante su análisis de la condición de función generalizada singular.

Materiales y métodos

El Estudio se llevó a cabo en los ambientes de la FIIS.

Métodos

Usaremos los métodos de demostración matemática directa e indirecta.

Técnicas

Se hará uso de las técnicas, de derivación e integración así la del desarrollo y análisis del polinomio de Taylor y de Fourier.

Modelo

Considerando la función delta de Dirac no es una función para la matemática usual, la cual requiere que una función tenga un valor definido para cada punto de su dominio y si hacemos que $a \to -\infty$ y $b \to +\infty$, entonces se cumple $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\,(t) dt = 1$, en el análisis matemático, es llamada distribución o función generalizada, que no es más un objeto matemático que generaliza la noción de función y la de medida entonces qué condiciones debe tener una función generalizada (en particular la función delta de Dirac) para extender el concepto de derivada a todas las funciones localmente integrables.

Demostración

Extender el concepto de derivada a todas las funciones localmente integrables y a entes aún más generales.

Análisis de la condición de función localmente integrable

Lema de Du Bois – Reymond. Para que una función $\varphi\,(t)$ localmente integrable en G se haga cero en la región G en el sentido de las funciones generalizadas es necesario y suficiente que $\varphi\,(t) = 0$ en casi todos los puntos de G.

Demostración

Condición Necesaria

Por hipótesis: $< \varphi, f > = 0$, $\forall f \in D(G)$

Sea α un elemento arbitrario de G, entonces existe una esfera cerrada $U(\alpha, \varepsilon) \complement G$ tal que $\varphi(t) = 0$ en ella, según la hipótesis. Además, para cada vector $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ se tiene:

$$\phi_k(t) = e^{i\frac{kt}{\varepsilon}} \varphi_\varepsilon(t-a)$$

La cual pertenece a D(G), es decir, $\phi_k(t)$ es una función de base y φ_ε es la función campana. Por lo tanto:

$$\left\langle \varphi, \phi_k(t) \right\rangle = \int \varphi(t) \varphi_\varepsilon(t-a) e^{i\frac{kt}{\varepsilon}} dt = 0$$

En esta última expresión se puede ver que todos los coeficientes de Fourier de $\varphi(t)\varphi_\varepsilon(t-a)$ en la base $e^{i\frac{kt}{\varepsilon}}$ son cero, asimismo dichos coeficientes es integrable en $U(a, \varepsilon)$.

Por lo tanto, $\varphi(t)\varphi_\varepsilon(t-a) = 0$, lo que implica que $\varphi(t) = 0$ en casi todo punto de la esfera. Entonces $\varphi(t) = 0$ en casi todo punto de G, pues a es un elemento arbitrario de G.

Condición Suficiente

Por hipótesis: $\varphi(t) = 0$ en casi todo punto de G

Por lo tanto, $< \varphi, f > = \int \varphi\,(t) f(t) dt = 0$; $\forall f \in D(G)$

Es decir se llaman funciones generalizadas singulares a todas las que no son regulares y, por lo tanto, no se pueden poner en correspondencia biunívoca con ninguna función localmente integrable, por ejemplo, la función delta de Dirac es la funcional lineal continua que $< \varphi, f > = f(0)$, $\forall f \in D$. Donde $\delta \in D'$ y $\delta(t) = 0$, $\forall f \neq 0$ lo que implica que supp $\delta = \{0\}$.

Análisis de la condición de función generalizada singular

Teorema. La función delta de Dirac $\delta(t)$ es una función generalizada singular.

Demostración

Demostrando por el absurdo. Supongamos que existe una función $\varphi(t)$ localmente integrable tal que para cualquier $f \in D$ se tiene:

$$\int \varphi(t) f(t) dt = f(0) \quad (*)$$

Además $f \in D$, por lo tanto $t_1 f \in D$, donde t_1 es la primera coordenada de t, así usando la definición $< \varphi, f > = 0$, $\forall f \in D(G)$ se tiene:

$$\int \varphi(t) t_1 f(t) dt = \langle t_1 \varphi, f \rangle = t_1 f(t)\big|_{t=0} = 0$$

Hay que resaltar que la función $t_1 f$, localmente integrables enR^n, es igual a cero en el sentido de las funciones generalizadas, y por el Lema de Du Bois – Reymond, $t_1 f(t)$ es cero en casi todos los puntos, así que $f(t) = 0$ en casi todos los puntos, lo cual contradice lo indicado en (*).

Por lo tanto, la función delta de Dirac $\delta(t)$ no puede ser regular, es decir, es una función generalizada singular.

Análisis de la derivada de funciones generalizadas

Se llama derivada generalizada $D^\alpha \varphi$ de la función generalizada $\varphi \in D'$ a la función generalizada que actúa según la fórmula:

$$< D^\alpha \varphi, f > = (-1)^{|\alpha|} < \varphi, D^\alpha f >, \forall f \in D, \text{ y } |a| \leq p$$

Si $\delta(t)$ es la función delta de Dirac, entonces:

$$< D^\alpha \delta, f > = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f(0), \forall f \in D, \text{ y } |a| \leq p$$

Que no es nada menos que el teorema: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = (-1)^n f^n(0)$

Resultados y discusión

1. Existe una relación biunívoca entre las funciones localmente integrables en R^n y las funciones generalizadas regulares, es decir, hay una equivalencia entre la función localmente integrable y la función generalizada dada por $< \varphi, f > = \int \varphi(t) f(t) dt$.
2. Toda función localmente integrable en R^n define por $< \varphi, f > = \int \varphi(t) f(t) dt$ a una función generalizada regular y por el Lema de Du Bois – Reymond toda función generalizada regular se determina con exactitud de valores en un conjunto de medida nula, por una función única localmente integrable en R^n.

Conclusiones

1. Si se define apropiadamente la generalización de la derivada, entonces las funciones generalizadas son infinitas veces derivables.
2. En ingeniería el uso de un factor unidad en la transformada de Fourier directa y un factor de $1/_{2\pi}$ en la transformada de Fourier inversa dan como resultado: $F\,[\delta(t - t0)] = e^{-(jw)t0}$, $t0 \in R$ y $F^{-1}\left[e^{-(jw)t0}\right] = \delta(t + t0)$, $t0 \in R$.

   La transformada de Fourier se utiliza para pasar una señal al dominio de frecuencia para así obtener información que no es evidente en el dominio temporal. Por ejemplo, es más fácil saber sobre qué ancho de banda se concentra la energía de una señal analizándola en el dominio de la frecuencia.
3. La función rampa definida por $rampa\,(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ tiene por derivada funcional la función salto de Heaviside, y es una función elemental real de un sólo argumento, continua y diferenciable en todo su dominio excepto en un punto (inicio de la rama) fácilmente computable a partir de la función mínimo o la función valor absoluto. Y sus principales aplicaciones prácticas de esta función se dan en ingeniería (procesamiento digital de señales, plasticidad, etc.). El término "función rampa" se debe a la forma de su representación gráfica.

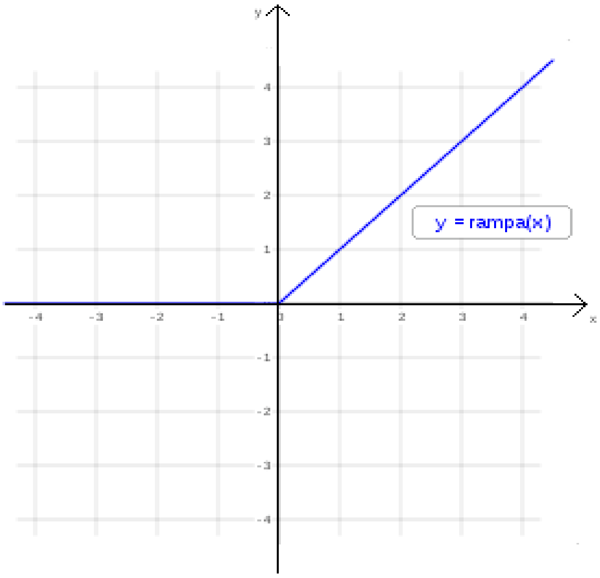

Figura 1. Función rampa

Puede definirse de diferentes maneras equivalentes:

En términos de la función valor absoluto, $rampa\,(x) = \frac{x+|x|}{2}$

En términos de la función máximo, $rampa\,(x) = \max(x, 0)$

En términos de la función unitaria de Heaviside, $rampa\ (x) = xH(x)$, donde $H\ (x) = \begin{cases} 0, si\ x < 0 \\ 1, si\ x \geq 0 \end{cases}$ es la función unitaria de Heaviside.

Referencias bibliográficas

1. Neal E. Theoretical Mechanics. Krieger Publishing Company; 1990;
2. Mathews J, Walker R. Matemáticas para físicos". Edit. Reverte S. A.; 2000. p. 61– 99.
3. Lighthill M. Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions, Cambridge, at the University Press., 1962.
4. Hsu H. Análisis de Fourier. Fondo Educativo Interamericano; 1970.